Problemi sull'ellisse

1) Equazione dell'ellisse passante per $A(2, \sqrt{3})$ e $B(0, -2)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{4} = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} = \frac{1}{4} \\ b^2 = 4 \end{cases} \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Quindi $a = 4$ e $b = 2$ (l'ellisse ha i fuochi sull'asse delle ascisse).

2) Ellisse passante per $A\left(1, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{7}}{4}\right)$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{25 \cdot 3}{4b^2} = 1 \\ \frac{9}{4a^2} + \frac{25 \cdot 7}{16b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{25 \cdot 3}{4b^2} \\ \frac{9}{4} \cdot \left(1 - \frac{25 \cdot 3}{4b^2}\right) + \frac{25 \cdot 7}{16b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{25 \cdot 3}{4b^2} \\ \frac{9}{4} - \frac{25 \cdot 27}{16b^2} + \frac{25 \cdot 7}{16b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{25 \cdot 3}{4b^2} \\ -\frac{25 \cdot \cancel{20}^{5}}{\cancel{16}_{4}\, b^2} = 1 - \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{25 \cdot 3}{4b^2} \\ \frac{25}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

3) L'equazione dell'ellisse avente due vertici nei punti $A(-3,0)$, $B(3,0)$

Esistono infinite ellissi con $a=3$: tutte quelle di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$

4) Dopo aver determinato vertici e fuochi dell'ellisse di equazione $8x^2+9y^2=360$, calcola la sua eccentricità

Si può scrivere l'equazione in forma canonica dividendo per 360:

$$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{40}=1, \qquad a=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$

$$b=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

Quindi $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{45-40}=\sqrt{5}$

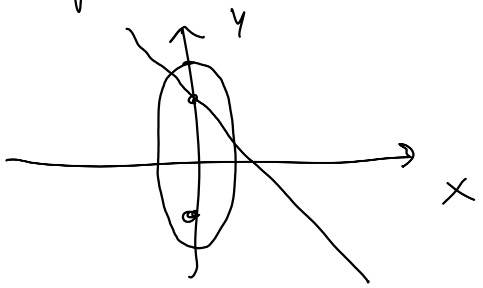
L'eccentricità vale $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$

5) Data l'ellisse $9x^2+4y^2=144$, trova le intersezioni con la retta di pendenza -3 e passante per il fuoco di ordinata positiva

In forma canonica:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1 \quad , \quad a=6, \quad b=4$$

I fuochi sono sull'asse y.



$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

La retta ha eq. $y=-3x+2\sqrt{5}$

Mettendo a sistema:

$$\begin{cases} 9x^2+4y^2=144 \\ y=-3x+2\sqrt{5} \end{cases} \quad \begin{cases} 9x^2+4(-3x+2\sqrt{5})^2=144 \\ y=-3x+2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2+36x^2-48\sqrt{5}x+80=144 \\ y=-3x+2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 45x^2-48\sqrt{5}x-64=0 \\ y=-3x+2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{24\sqrt{5} \pm \sqrt{24^2 \cdot 5 + 45 \cdot 64}}{45} = \dfrac{24\sqrt{5} \pm 24\sqrt{10}}{45} \\ y = -3x + 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{8\sqrt{5} \pm 8\sqrt{10}}{15} \\ y = -3x + 2\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A\left(\dfrac{8\sqrt{5} - 8\sqrt{10}}{15}, \dfrac{2\sqrt{5} + 8\sqrt{10}}{5}\right) \\ B\left(\dfrac{8\sqrt{5} + 8\sqrt{10}}{15}, \dfrac{2\sqrt{5} - 8\sqrt{10}}{5}\right) \end{matrix}$$

6) Tangenti all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ condotte dal punto $P(0,2)$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ y - 2 = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{(mx+2)^2}{3} = 1 \\ y - 2 = mx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{m^2x^2 + 4mx + 4}{3} = 1 \\ y - 2 = mx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(3 + 5m^2) + 20mx + 20 = 15 \\ y - 2 = mx \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2(3 + 5m^2) + 20mx + 5 = 0 \\ y - 2 = mx \end{cases}$$

$$\Delta(m) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 100m^2 - 5(3 + 5m^2) = 0$$

$$100m^2 - 15 - 25m^2 = 0, \quad m^2 = \frac{\cancel{15}}{5\,\cancel{75}}, \quad m = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Le tangenti hanno equazione:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{5}}x + 2 \quad , \quad y = \frac{1}{\sqrt{5}}x + 2$$